WS O8/09

Aufgabe 6

Sei $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = 2^x - x - 3$ für alle $x \in [0,3]$. Es gilt $f(0) = -2 < 0$ und $f(3) = 2^3 - 3 - 3 = 2 > 0$. Da f stetig ist, gibt es mit dem Nullstellensatz von Bolzano ein $x_0 \in [0,3]$ mit $f(x_0) = 0$.

SS 09

Aufgabe 5

Die Funktion f ist auf dem Intervall $[1,e]$ stetig. Es gilt $f(1) = 1 - \ln(1) = 1 - 0 > 0$ und $f(e) = \frac{1}{e} - 1 < 0$. Mit dem Nullstellensatz von Bolzano gibt es ein $x_0 \in (1,e)$, sodass $f(x_0) = 0$ ist. Somit gibt es mindestens eine Nullstelle von f in $[1,e]$. Die Funktion f ist auch differenzierbar, und es gilt $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0$ für alle $x \in [1,e]$. Somit ist f im Intervall $[1,e]$ streng monoton fallend und stetig. Es folgt, dass f höchstens eine Nullstelle in $[1,e]$ besitzt. Zusammen folgt, dass f genau eine Nullstelle in $[1,e]$ besitzt.

WS 09/10

Aufgabe 4

Es gilt $f(0) = |-1| > 0$ und $f(4) = 3 + 12 - 16 = -1 < 0$.

Als Summe und Verknüpfung stetiger Funktionen ist f stetig. Mit dem Nullstellensatz von Bolzano folgt, dass f in $[0,4]$ eine Nullstelle besitzt.

SS 10

SS 10

Aufgabe 5

Es gilt $f(0) = \cos(0) - \exp(0) + 1 = 1 - 1 + 1 = 1 > 0$ und $f(\frac{1}{100}) = \cos(2) - \exp(\frac{1}{100}) + 1 < 0$, denn $\cos(2) < 0$ und $\exp(\frac{1}{100}) > \exp(0) = 1$, da die Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist.

Als Summe stetiger Funktionen ist f stetig. Mit dem Nullstellensatz von Bolzano folgt, dass f in $[0, \frac{1}{100}]$ eine Nullstelle besitzt.

Die Funktion f ist als Summe differenzierbarer Funktionen auch differenzierbar, und es gilt $f'(x) = -200\sin(200x) - \exp(x) < 0$ für $x \in [0, \frac{1}{100}]$, denn $\sin(y) \geq 0$ für $y \in [0,2] \subseteq [0,\pi]$ und $\exp(x) > 0$. Also ist f streng monoton fallend auf $[0, \frac{1}{100}]$. Es folgt, dass f genau eine Nullstelle in $[0, \frac{1}{100}]$ besitzt.

SS 13

Aufgabe 6

Sei $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = e^{x-1} + x^2 - 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist f stetig und differenzierbar auf $[0,1]$. Es gilt $f(0) = e^{-1} - 1 < 0$ und $f(1) = 1 - 1 + 1 = 1 > 0$. Mit dem Nullstellensatz von Bolzano hat f also mindestens eine Nullstelle im Intervall $(0,1)$. Weiter gilt

$$f'(x) = e^{x-1} + 2x \text{ für } x \in [0,1]$$

und damit $f'(x) > 0$ für alle $x \in [0,1]$. Die Funktion f ist damit auf dem ganzen Intervall streng monoton steigend und kann daher nur höchstens eine Nullstelle haben. Insgesamt ist damit gezeigt, dass f genau eine Nullstelle auf $[0,1]$ besitzt. Diese Nullstelle ist genau das $x \in [0,1]$, für das $1 - x^2 = e^{x-1}$ gilt.

WS 13/14

Aufgabe 4

f ist auf $(0,\infty)$ differenzierbar mit $f'(x) = \frac{1}{x}e^{-x} - \ln(x)e^{-x} = \left(\frac{1}{x} - \ln(x)\right)e^{-x}$. Der Faktor e^{-x} ist immer positiv, das Vorzeichen von f' wird also von $h(x) = \frac{1}{x} - \ln(x)$ bestimmt. Das ist eine stetige Funktion mit (z.B.) $h(1) = 1 - 0 = 1 > 0$, $h(e) = \frac{1}{e} - 1 < 0$ (wegen $e > 1$). Nach dem Nullstellensatz von Bolzano hat h und damit auch f' also mindestens eine Nullstelle x_0 in $(0,\infty)$. (Genauer gilt x_0 in $(1,e)$, aber das interessiert uns jetzt nicht.) Es hat dort aber auch höchstens eine Nullstelle, denn in $(0,\infty)$ sind $\frac{1}{x}$ und $-\ln(x)$ streng monoton fallend (denn $\ln(x)$ ist streng monoton wachsend), insgesamt ist also h streng monoton fallend. (Das folgt auch aus $h'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0$ für $x > 0$.) Damit ist $h(x) > 0$ für $x < x_0$ und $h(x) < 0$ für $x > x_0$, und dasselbe gilt dann auch für f'. Also hat f in x_0 ein Maximum, und es kann keine weiteren Extrema geben.

WS 15/16

Aufgabe 5

f ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = \cos(x) - x \cdot \sin(x)$. Das ist eine stetige Funktion mit $f'(0) = 1 - 0 = 1 > 0$, $f'(\frac{\pi}{2}) = 0 - \frac{\pi}{2} \cdot 1 < 0$. Nach dem Nullstellensatz von Bolzano hat damit f' also mindestens eine Nullstelle x_0 in $(0, \frac{\pi}{2})$. Es hat dort aber auch höchstens eine Nullstelle, denn in $(0, \frac{\pi}{2})$ gilt $f''(x) = -\sin(x) - \sin(x) - x\cos(x) < 0$ (weil $\sin(x)$ und $\cos(x)$ in $(0, \frac{\pi}{2})$ positiv sind), also ist f' in $(0, \frac{\pi}{2})$ streng monoton fallend. Somit hat f' in $(0, \frac{\pi}{2})$ genau eine Nullstelle x_0, und wegen $f''(x_0) < 0$ liegt hier ein Maximum von f vor.

SS 18

Aufgabe 6

Die Funktion f ist als Differenz zweier stetiger und differenzierbarer Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar. Weiter gilt $f(0) = -1 < 0$ und $f(\frac{\pi}{2}) = 1 - e^{-\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}$. Da $\frac{\pi}{2} > 1$ gilt, ist $\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} < \frac{1}{e}$ und damit $1 - \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} > 1 - \frac{1}{e} > 0$. Es ist also $f(\frac{\pi}{2}) > 0$. Aus dem Nullstellensatz folgt nun, dass f im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ eine Nullstelle besitzt. Weiter gilt

$$f'(x) = \cos(x) + e^{-x},$$

wobei $\cos(x) \geq 0$ für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ und $e^{-x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Das heißt, $f'(x) > 0$ für alle $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, also ist f streng monoton wachsend und damit injektiv in diesem Intervall. Damit ist gezeigt, dass es nur eine Nullstelle im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ geben kann.

WS 18/19

Aufgabe 5

Wir betrachten die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ f(x) = e^{-x}\,,\ g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$. Sie sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar (g ist eine rationale Funktion, deren Nenner keine Nullstelle hat). f ist als Spiegelung der e-Funktion an der y-Achse streng monoton fallend ($f'(x) = -e^{-x} < 0$). Wir untersuchen die (ebenfalls stetige und differenzierbare) Differenzfunktion $h = f - g$ auf Nullstellen. Für $x < 0$ gilt $f(x) > f(0) = e^0 = 1\,,\ g(x) = \frac{x^2}{x^2+1} < 1$, also jedenfalls $h(x) > 0$. In $x = 0$ gilt $h(0) = e^0 - \frac{0}{1} = e^0 = 1 > 0$ (auch hier liegt also keine Nullstelle vor), in (z.B.) $x = 1$ gilt dagegen $h(1) = e^{-1} - \frac{1}{1+1} = \frac{1}{e} - \frac{1}{2} = \frac{2-e}{2e} < 0$ (wegen $e > 2$). Also hat h nach dem Nullstellensatz mindestens eine Nullstelle im Intervall $(0, 1)$. In ganz $(0, \infty)$ kann es aber höchstens eine geben, denn wegen

$$h'(x) = -e^{-x} - \frac{2x \cdot (x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = -e^{-x} - \frac{2x}{(x^2+1)^2} < 0 \quad \text{für} \quad x > 0$$

ist h streng monoton fallend auf ganz $(0, \infty)$. Also gibt es genau ein x (und zwar in $(0, 1)$) mit $f(x) = g(x)$.